ADVANCES IN MATHEMATICS 22, 131–145 (1976)

Sur Certaines Martingales de Benoit Mandelbrot

J.-P. KAHANE ET J. PEYRIÈRE

Département de Mathématiques, Université de Paris—Sud, Paris, France

EN HOMMAGE AU PROFESSEUR NORMAN LEVINSON

En analysant de façon critique le modèle aléatoire de turbulence de A. M. Yaglom, Mandelbrot a introduit son propre modèle, qu'il appelle "canonique" [1–3]. On part d'un pavé, qu'on divise successivement en $c, c^2, \ldots, c^n, \ldots$ pavés semblables; chaque pavé de la n-ième étape est divisé en c pavés égaux de la $(n+1)$ième étape. On donne une suite de variables aléatoires indépendantes W_P, équidistribuées, positives, d'espérance 1 et indexés par les pavés P qu'on vient de considérer. Partant de la mesure de Lebesgue μ_0 sur le pavé initial, on construit par étapes la suite des mesures μ_n : μ_n a une densité constante sur chaque pavé P de la $n$ième étape, et la densité de μ_n sur P est le produit par W_P de la densité de μ_{n-1} sur P. La suite des mesures μ_n est une martingale vectorielle, qui converge vers une mesure aléatoire μ. Dans [2, 3] sont indiqués des résultats et des problèmes concernant la mesure μ (conditions de non dégénérescence; étude des moments de $\| \mu \|$; étude des boréliens portant μ et de leur dimension de Hausdorff). Certaines conjectures de Mandelbrot ont été résolues par Peyrière [4] ou par Kahane [5]. On se propose ici d'exposer ces résultats sous une forme améliorée. Les Théorèmes 1, 2, 3 ci-dessous sont dus à J.-P. Kahane, le Théorème 4 à J. Peyrière.

Il sera commode de prendre pour pavé initial l'intervalle [0, 1]. Les "pavés" P sont alors les intervalles c-adiques

$$I(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \left[\sum_1^n j_k c^{-k}, \sum_1^n j_k c^{-k} + c^{-n}\right[$$

$(n = 1, 2, \ldots; j_k = 0, 1, \ldots, c-1)$.

On donne un entier $c \geqslant 2$, et une variable aléatoire positive d'espérance 1. On désigne par $W(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ une suite de v.a. indépendantes, de même distribution que W, et par μ_n la mesure, définie sur [0, 1], dont la densité est $W(j_1)\, W(j_1 j_2) \cdots W(j_1, j_2, ..., j_n)$ sur l'intervalle $I(j_1, j_2, ..., j_n)$.

Posons

$$Y_n = \| \mu_n \| = c^{-n} \sum_{j_1, j_2, ..., j_n} W(j_1)\, W(j_1, j_2) \cdots W(j_1, j_2, ..., j_n). \tag{1}$$

C'est une martingale positive, et $E(Y_n) = 1$. Elle converge p.s. vers une v.a. Y_∞ telle que $E(Y_\infty) \leqslant 1$. De même, pour tout intervalle c-adique I, $\mu_n(I)$ est une martingale d'espérance $|I|$ qui converge p.s. vers une limite $\mu(I)$. Donc μ_n tend p.s. vers une mesure μ de masse totale Y_∞, au sens de la topologie faible.

Il est commode d'écrire (1) sous la forme

$$Y_n = c^{-1} \sum_{j=0}^{c-1} W(j)\, Y_{n-1}(j). \tag{2}$$

Les v.a. $W(j)$ et $Y_{n-1}(j)$ sont mutuellement indépendantes, et les $Y_{n-1}(j)$ ont les même distribution que Y_{n-1}.

Considérons enfin l'équation fonctionnelle

$$Z = c^{-1} \sum_{j=0}^{c-1} W_j Z_j\,, \tag{3}$$

où les v.a. W_j et Z_j sont mutuellement indépendantes, les W_j ayant même distribution que W et les Z_j même distribution que Z. L'inconnue dans (3) est la distribution de Z; par abus de langage, on dira que Z est solution de (3). Il est clair que Y_∞ est solution de (3). Il peut y avoir d'autres solutions; par exemple, dans le cas $W \equiv 1$, une variable de Cauchy est solution de (3), et elle ne peut pas être du type Y_∞ puisqu'elle n'est ni positive, ni sommable.

Il sera commode d'associer à W la fonction convexe

$$\varphi(h) = \log_c E(W^h) - (h-1) (\text{où } \log_c x = \log x / \log c), \tag{4}$$

qui est toujours définie pour $0 \leqslant h \leqslant 1$, et peut être définie pour des valeurs $h > 1$. La fonction φ s'annule au point 1 et éventuellement en un autre point, α_0. La dérivée à gauche de φ au point 1 est

$$\varphi'(1-0) = E(W \log_c W) - 1 = -D.$$

On verra le rôle joué par D dans la non-dégénérescence de μ, et dans la dimension des boréliens portant μ. On verra aussi le rôle de α_0 en relation avec les moments de Y_∞.

Les illustrations les plus frappantes sont (1) le cas où $W = e^{\tau\xi-(\tau^2/2)}$, ξ étant une variable normale (c'est l'origine de la théorie)—alors φ est un polynôme du second degré—, (2) le cas où W prend seulement deux valeurs, dont la valeur 0—alors φ est une fonction linéaire, et $c^n Y_n$ peut s'interpréter comme la population au temps n dans un processus de naissance et de mort (chaque individu donnant naissance à c rejetons, ayant pour chance de survie $P\,(W \neq 0)$)—.

Toutes ces notions ont été introduites par Mandelbrot dans [2, 3].

Nous allons établir les résultats suivants.

THÉORÈME 1 (condition de non-dégénérescence). *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(α) $E(Y_\infty) = 1$,

(β) $E(Y_\infty) > 0$,

(γ) (3) *a une solution* Z *telle que* $E(Z) = 1$,

(δ) $E(W \log W) < \log c$.

THÉORÈME 2 (condition d'existence des moments). *Soit* $h > 1$. *On a* $0 < E(Y_\infty{}^h) < \infty$ *si et seulement si* $E(W^h) < c^{h-1}$.

THÉORÈME 3 (cas où Y_∞ a des moments de tous les ordres). (1) *Les assertions suivantes sont équivalentes*: (α_1) $0 < E(Y_\infty{}^h) < \infty$ *pour tout* $h > 1$, (β_1) $\| W \|_\infty =$ ess. sup $W \leqslant c$ *et* $P(W = c) < 1/c$ (*inégalité stricte*). (2) *Si* (β_1) *a lieu, on a*

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\log E(Y_\infty{}^h)}{h \log h} = \log_c \| W \|_\infty . \tag{5}$$

THÉORÈME 4 (étude de la mesure μ). *On suppose* $E(Y_\infty \log Y_\infty) < \infty$. *Pour chaque* $x \in [0, 1[$, *on désigne par* $I_n(x)$ *l'intervalle c-adique d'ordre n contenant* x; *sa mesure de Lebesgue est* $m(I_n(x)) = c^{-n}$. *On a* p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log m(I_n(x))} = D = 1 - E(W \log_c W) \qquad \mu\text{-presque partout.} \tag{6}$$

COROLLAIRE. *La mesure* μ *est* p.s. *portée par un borélien de dimension* D, *tandis que tout borélien de dimension* $<D$ *est de* μ*-mesure nulle.*

Avant de donner les démonstrations, voici quelques remarques.

La condition (δ) du Théorème 1 s'écrit $D > 0$. Dans [5], on avait seulement établi que

$$D > 0 \Rightarrow (\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow D \geqslant 0.$$

Le rôle de D dans l'étude de la dégénérescence avait été deviné dans [2, Sect. 10].

Le Théorème 2 répond à une conjecture de [2]. Il est établi dans [5]. La démonstration qu'on va donner est plus simple. Remarquons que la condition $E(W^h) < c^{h-1}$ s'écrit aussi $\varphi(h) < 0$. Si φ s'annule en $\alpha_0 > 1$, c'est aussi $h < \alpha_0$.

Le Théorème 3 constitue un commentaire critique de [2, Proposition 10]. Il correspond à $\alpha_0 = \infty$. La démonstration donnera des variantes de (5).

Le corollaire du Théorème 4 répond à une conjecture de [2]. Il améliore [4].

Démonstration du Théorème 1. Visiblement $(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma)$. Supposons ($\gamma$), et soit Z une solution de (3) telle que $E(Z) = 1$. Il existe une suite de v.a. indépendantes $W(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$; $j_k = 0, 1, \ldots, c-1$), ayant même distribution que W, et une suite de v.a. $Z(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ayant même distribution que Z et indépendantes des $W(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ lorsque $k \leqslant n$, telles que pour tout n

$$Z = c^{-n} \sum_{j_1, \ldots, j_n} W(j_1)\, W(j_1, j_2) \cdots W(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, Z(j_1, j_2, \ldots, j_n). \tag{7}$$

En effet, (7) se réduit à (3) pour $n = 1$ ($W(j) = W_j$ et $Z(j) = Z_j$), et l'équation (3), appliquée à $Z(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ s'écrit

$$Z(j_1, j_2, \ldots, j_n) = c^{-1} \sum_{j_{n+1}} W(j_1, j_2, \ldots, j_{n+1})\, Z(j_1, j_2, \ldots, j_n, j_{n+1})$$

avec les conditions requises pour les v.a. du second membre. L'espérance conditionnelle de Z par rapport à la tribu engendrée par les $W(j_1, \ldots, j_k)$ ($k \leqslant n$) est Y_n (défini par (1)). Il s'ensuit que la martingale Y_n est uniformément intégrable et que $Z = Y_\infty$ p.s. (voir, p. ex., [6, V 8]). Donc $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$, et de plus ($\gamma$) entraîne $Z \geqslant 0$ p.s.

Supposons encore (γ), et en conséquence $Z \geqslant 0$. Pour $0 < h < 1$ la fonction x^h est sous-additive, donc (3) donne

$$E(c^h Z^h) \leqslant \sum_{j=0}^{c-1} E((W_j Z_j)^h) = cE(W^h)\, E(Z^h) \tag{8}$$

avec $0 < E(Z^h) \leqslant 1$. La fonction $\varphi(h)$ définie par (4) est donc positive sur $[0, 1]$, ce qui entraîne $\varphi'(1-0) \leqslant 0$, soit $D \geqslant 0$. Pour aller plus loin, on doit améliorer (8).

LEMME A. $(x+y)^h \leqslant x^h + hy^h$ *pour* $x \geqslant y > 0$, $0 < h < 1$.

Preuve. $y = 1$, et la formule des accroissements finis.

LEMME B. *Soit X une* v.a. *positive sommable, et X' une* v.a. *équidistribuée avec X et indépendante de X. Il existe un nombre $\epsilon_X > 0$ tel que*

$$E(X^h 1_{X' \geqslant X}) \geqslant \epsilon_X E(X^h) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant h \leqslant 1.$$

Preuve. Chacune des espérances écrites est une fonction continue de h et strictement positive sur $[0, 1]$.

Comme la fonction x^h est sous-additive, on a à partir de (3)

$$c^h Z^h \leqslant \sum_{j=0}^{c-1} W_j{}^h Z_j{}^h \qquad \text{p.s.}$$

D'après le Lemme A,

$$c^h Z^h \leqslant h W_0{}^h Z_0{}^h + \sum_{j=1}^{c-1} W_j{}^h Z_j{}^h \qquad \text{si} \quad W_1 Z_1 \geqslant W_0 Z_0\,,$$

donc

$$E(c^h Z^h) = \sum_{j=0}^{c-1} E(W_j{}^h Z_j{}^h) - (1-h)\, E(W_0{}^h Z_0{}^h 1_{W_1 Z_1 \geqslant W_0 Z_0}),$$

d'où, en utilisant le Lemme B,

$$E(c^h Z^h) \leqslant c E(W^h)\, E(Z^h) - (1-h)\, \epsilon_{WZ} E(W^h)\, E(Z^h). \tag{9}$$

(9) est l'amélioration souhaitée de (8). En divisant par $E(Z^h)$ et en prenant les logarithmes, on a

$$\varphi(h) + \log_c \left(1 - \frac{(1-h)\epsilon}{c}\right) \geqslant 0 \qquad \text{sur} \quad [0, 1] \quad (\epsilon = \epsilon_{WZ}) \qquad \cdot$$

d'où $\varphi'(1-0) + (\epsilon/c \log c) \leqslant 0$, donc $D > 0$.

On a montré $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta) \Leftrightarrow (\gamma) \Rightarrow (\delta)$. On va terminer la démonstration en montrant que (δ) entraîne (β).

LEMME C. $(x+y)^h \geqslant x^h + y^h - 2(1-h)(xy)^{h/2}$ *pour* $x > 0, y > 0$, $h_0 < h < 1$.

Preuve. Posons $f(t) = e^{th} + e^{-th} - (e^t + e^{-t})^h$ et $C_h = \sup_t f(t)$. Il s'agit de montrer que $C_h \leqslant 2(1-h)$ quand $h < 1$ est assez voisin de 1. On vérifie que $f(t)$ a un minimum local en $t = 0$, tend vers 0 quand $t \to \infty$, et

$$f(t) = 2\,\frac{e^{(1-h)t} - e^{-(1-h)t}}{e^t - e^{-t}}$$

aux points $t \neq 0$ où $f'(t) = 0$. Or la fonction

$$g(\epsilon) = e^{\epsilon t} - e^{-\epsilon t} - \epsilon(e^t - e^{-t})$$

est nulle pour $\epsilon = 0$ et sa dérivée est négative pour $\epsilon < 3^{-1/2}$ (on le vérifie sur son développement de Taylor); donc $g(\epsilon) \leqslant 0$ pour $\epsilon < 3^{-1/2}$, et il en résulte que $f(t) \leqslant 2(1-h)$ aux points t où f admet un maximum local, lorsque $0 < 1 - h < 3^{-1/2}$. Le lemme est établi.

En voici un corollaire: on a

$$\left(\sum_1^c x_j\right)^h \geqslant \sum_1^c x_j^h - 2(1-h) \sum_{i<j} (x_i x_j)^{h/2} \tag{10}$$

pour $x_j > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, c$) et $h_0 < h < 1$. En effet, (10) s'obtient par induction à partir de

$$\left(\sum_1^c x_j\right)^h \geqslant x_1^h + \left(\sum_2^c x_j\right)^h - 2(1-h)\, x_1^{h/2} \left(\sum_2^c x_j\right)^{h/2}$$

$$\geqslant x_1^h + \left(\sum_2^c x_j\right)^h - 2(1-h) \sum_{j>1} (x_1 x_j)^{h/2}$$

qui résulte du Lemme C et de la sous-additivité de la fonction $x^{h/2}$.

Reprenons la formule (2), que nous écrivons provisoirement

$$Y = c^{-1} \sum_{j=0}^{c-1} W_j X_j \tag{11}$$

(Y, W_j, X_j étant écrits pour Y_n, $W(j)$, $Y_{n-1}(j)$). Supposons $h_0 < h < 1$. Appliquons le Lemme C sous la forme (10) avec $x_{j+1} = W_j X_j$. On obtient

$$c^h Y^h \geqslant \sum_{j=0}^{c-1} W_j^h X_j^h - 2(1-h) \sum_{i<j} W_i^{h/2} W_j^{h/2} X_i^{h/2} X_j^{h/2},$$

d'où, en prenant les espérances,

$$c^h E(Y^h) \geqslant cE(W^h)\, E(X^h) - c(c-1)(1-h)\, E^2(W^{h/2})\, E^2(X^{h/2}).$$

En revenant aux notations initiales,

$$E(Y_n{}^h) \geqslant c^{1-h} E(W^h)\, E(Y_{n-1}^h) - c^{1-h}(c-1)(1-h)\, E^2(W^{h/2})\, E^2(Y_{n-1}^{h/2}).$$

Compte tenu de $E(Y_n{}^h) \leqslant E(Y_{n-1}^h)$ (inégalité des surmartingales),

$$E(Y_n{}^h)(1 - c^{1-h}E(W^h)) \geqslant -c^{1-h}(c-1)(1-h)\, E^2(W^{h/2})\, E^2(Y_{n-1}^{h/2})$$

donc

$$E(Y_n{}^h)(c^{\varphi(h)} - 1) \leqslant c^{1-h}(c-1)(1-h)\, E^2(Y_{n-1}^{h/2})$$

et, en faisant tendre h vers 1,

$$D \log c \leqslant (c-1)\, E^2(Y_{n-1}^{1/2}).$$

Or les v.a. $Y_n^{1/2}$ sont équiintégrables, puisque $E(Y_n) = 1$. Comme elles convergent p.s. vers Y_∞, on a $E(Y_\infty^{1/2}) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n^{1/2})$ (cf., p. ex., [6, II.21]), donc $E(Y_\infty^{1/2}) \neq 0$. Cela entraîne (β), ce qui termine la démonstration du Théorème 1.

Démonstration du Théorème 2. Supposons d'abord que (3) ait une solution positive Z telle que $0 < E(Z^h) < \infty$, h donné >1. Comme la fonction x^h est suradditive, on a

$$c^h Z^h \geqslant \sum_{j=0}^{c-1} (W_j Z_j)^h$$

et l'inégalité est stricte sur un évènement de probabilité strictement positive, donc

$$c^h E(Z^h) > cE(W^h)\, E(Z^h),$$

soit $E(W^h) < c^{h-1}$.

Inversement, supposons $E(W^h) < c^{h-1}$, c'est-à-dire $\varphi(h) < 0$, et soit k l'entier tel que $k < h \leqslant k+1$. Comme la fonction $x^{h/(k+1)}$ est sous-additive, on a, pour $x_j \geqslant 0$ ($j = 1, 2,\ldots, c$),

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_c)^h &\leqslant (x_1^{h/k+1} + \cdots + x_c^{h/k+1})^{k+1} \\ &= x_1{}^h + \cdots + x_c{}^h + \sum \gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_c} (x_1^{\alpha_1},\ldots, x_c^{\alpha_c})^{h/(k+1)};\end{aligned}$$

dans la dernière somme, les exposants de x_j ne dépassent pas k, les coefficients sont positifs, et $\sum \gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_c} = c^{k+1} - c$.

Reprenant la formule (2) sous la forme (11), on obtient ici (en remarquant que $E(U^{h/(k+1)}) \leqslant E(U)$ quand $U \geqslant 0$ et que $\prod_j E(U^{\alpha_j}) \leqslant E(U)\, E(U^k)$ quand les α_j sont entiers $\geqslant 0$, $\sum \alpha_j = k + 1$, et qu'au moins deux des α_j sont différents de 0)

$$c^h E(Y^h) \leqslant cE(W^h)\, E(X^h) + (c^{k+1} - c)[E(W^k)\, E(X^k)]^{h/k}$$

donc

$$E(Y_n{}^h) \leqslant c^{1-h} E(W^h)\, E(Y_{n-1}^h) + c[E(W^k)\, E(Y_{n-1}^k)]^{h/k}$$

et, compte tenu de l'inégalité $E(Y_n{}^h) \geqslant E(Y_{n-1}^h)$ (sous-martingale)

$$E(Y_n{}^h)(1 - c^{1-h} E(W^h)) \leqslant c[E(W^k)\, E(Y_n{}^k)]^{h/k}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on voit que

$$E(Y_\infty{}^k) < \infty \Rightarrow E(Y_\infty{}^h) < \infty.$$

Cela établit le résultat cherché quand $1 < h \leqslant 2$. Supposons maintenant $h > 2$. Comme l'hypothèse $\varphi(h) < 0$ entraîne $\varphi(l) < 0$ pour tout entier $\leqslant h$, on a aussi

$$E(Y_\infty^{l-1}) < \infty \Rightarrow E(Y_\infty{}^l) < \infty$$

pour $l = 2,\ldots, k$. Les implications écrites montrent que $E(Y_\infty{}^h) < \infty$. Cela termine la démonstration du Théorème 2.

Démonstration du Théorème 3. Partie 1. D'après le Théorème 2, (α_1) entraîne $E(W^h) < c^{h-1}$ pour tout $h > 0$. Cela entraîne (β_1). Inversement, si (β_1) a lieu, la condition (δ) du Théorème 1 est satisfaite, donc $E(Y_\infty{}^h) > 0$. De plus $E(W^h) \leqslant c^h$ soit $\varphi(h) \leqslant 1$ pour tout $h > 0$. Comme $\varphi(1) = 0$ et que φ est convexe, cela entraîne $\varphi(h) < 0$ pour tout $h > 1$, c'est-à-dire $E(W^h) < c^{h-1}$, ou $\varphi \equiv 0$, c'est-à-dire $W \equiv 1$. Donc $E(Y_\infty{}^h) < \infty$ pour tout $h > 0$. Ainsi $(\alpha_1) \Leftrightarrow (\beta_1)$.

Partie 2. (β_1) Alors (Théorème 1) $E(Y_\infty) = 1$; d'autre part il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\varphi(h) < \log_c(1 - \epsilon)$ pour $h \geqslant 2$, soit

$$E(W^h) \leqslant (1 - \epsilon)\, c^{h-1} \qquad (h \geqslant 2). \tag{12}$$

Considérons la formule (3), avec $Z = Y_\infty$, et soit h un entier $\geqslant 2$. On a

$$c^h Z^h = \left(\sum_{j=0}^{c-1} W_j Z_j\right)^h$$

d'où

$$c^h E(Z^h) = cE(W^h)\, E(Z^h) + \sum_{\substack{h_1+\cdots+h_c=h \\ h_j \leqslant h-1}} \frac{h!}{h_1! \cdots h_c!} \prod_{j=1}^{c} E(W^{h_j}) \prod_{j=1}^{c} E(Z^{h_j}). \tag{13}$$

(13) avec (12) donne

$$\epsilon c^h E(Z^h) \leqslant \sum_{\text{idem}} \frac{h!}{h_1! \cdots h_c!} \prod E(W^{h_j}) \prod E(Z^{h_j}) \tag{14}$$

donc

$$E(Z^h) \leqslant \frac{1}{\epsilon} \sum_{\text{idem}} \frac{h!}{h_1! \cdots h_c!} \prod E(Z^{h_j}).$$

Lemme D. *Pour tout* $\alpha > 0$, *on a*

$$\sum_{\substack{h_1+\cdots+h_c=h \\ h_j \leqslant h-1}} (h_1! \cdots h_c!)^\alpha = o(h!)^\alpha) \qquad (h \to \infty).$$

Preuve immédiate pour $c = 2$, et de là par récurrence sur c.
Posons ($\alpha > 0$ étant fixé) $A_h = \sup_{l<h}(E(Z^l)/(l!)^{1+\alpha})^{1/l}$; (14) donne

$$A_{h+1}^h \leqslant \sup\left(\frac{1}{\epsilon}\, \frac{\Sigma(h_1! \cdots h_c!)^\alpha}{(h!)^\alpha}\, A_h{}^h,\ A_h{}^h\right).$$

D'après le Lemme D, la suite A_h est bornée, donc

$$E(Z^h) \leqslant A^h (h!)^{1+\alpha}, \qquad A = A(\alpha) < \infty.$$

En conséquence

$$\varlimsup_{h\to\infty} \frac{\log E(Y_\infty{}^h)}{h \log h} \leqslant 1. \tag{15}$$

Supposons maintenant $\| W \|_\infty = \gamma < c$. (14) donne ici

$$E(Z^h) \leqslant \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\gamma}{c}\right)^h \sum \frac{h!}{h_1! \cdots h_c!} \prod E(Z^{h_j}).$$

En posant $B_h = \sup_{l<h}(E(Z^l)/l!)^{1/l}$ et en observant que le nombre de termes dans la somme $\sum$ ne dépasse pas h^c, on obtient

$$B_{h+1}^h \leqslant \sup\left(\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\gamma}{c}\right)^h h^c B_h{}^h, B_h{}^h\right)$$

donc la suite B_h est bornée. Il en résulte que $E(e^{tZ}) < \infty$ pour $t > 0$ assez petit.

Posons $e^{\chi(t)} = E(e^{tZ})$. La formule (3) s'écrit

$$e^{\chi(ct)} = E^c(e^{\chi(Wt)}). \tag{16}$$

L'hypothèse $\| W \|_\infty = \gamma < c$ entraîne $\chi(ct) \leqslant c\chi(\gamma t)$, donc $\chi((c/\gamma)^n) = O(c^n)$ $(n \to \infty)$. Posant $(c/\gamma)^K = c$, on a

$$\chi(t) = O(t^K) \qquad (t \to \infty). \tag{17}$$

C'est un exercice de vérifier que (17) équivaut à l'existence d'un réel positif B tel que

$$E(Z^h) \leqslant B^h(h!)^{1-(1/K)}.$$

Or $1 - (1/K) = \log_c \gamma$. Donc on a

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\log E(Y^h)}{h \log h} \leqslant \log_c \gamma. \tag{18}$$

Choisissons maintenant $1 < \gamma_1 < \| W \|_\infty$ (le cas $\| W \|_\infty = 1$ est évident). Il existe $\epsilon > 0$ tel que $E(W^h) \geqslant \epsilon \gamma_1{}^h$. Reprenons la formule (13). Comme

$$\sum_{\substack{h_1+\cdots+h_c=h \\ h_j \leqslant h-1}} \frac{h!}{h_1! \cdots h_c!} = c^h - c,$$

on a

$$\begin{aligned} E(Z^h) &\geqslant \frac{c^h - c}{c^h} \inf \prod_{j=1}^{c} E(W^{h_j})\, E(Z^{h_j}) \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}\epsilon^c \gamma_1{}^h \inf \prod_{j=1}^{c} E(Z^{h_j}) \end{aligned}$$

la borne inférieure étant prise sur tous les c-uples $(h_1, h_2, ..., h_c)$ tels que $h_1 + h_2 + \cdots + h_c = h$ et $\sup_j h_j \leqslant h - 1$. Supposons h multiple de c. La borne inférieure est alors $E^c(Z^{h/c})$. Donc

$$\frac{\log E(Z^{ch})}{ch} \geqslant \frac{\log E(Z^h)}{h} + \log \gamma_1 + O\left(\frac{1}{h}\right)$$

par conséquent

$$\log E(Z^h) \geqslant \eta h \log h + O(h), \qquad \eta = \log_c \gamma_1 \tag{19}$$

d'où

$$\varliminf_{h\to\infty} \frac{\log E(Y_\infty{}^h)}{h \log h} \geqslant \log_c \gamma_1 \tag{20}$$

(15), (18) et (20) donnent bien

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\log E(Y_\infty{}^h)}{h \log h} = \log_c \| W \|_\infty .$$

Cela achève la démonstration du Théorème 3.

Remarquons que dans le cas $0 < P\ (W = c) < 1/c$ on a $\gamma = c$ dans (19), et il en résulte que $E(e^{tZ}) = \infty$ pour $t > 0$ assez grand.

Démonstration du Théorème 4. Soit Ω l'espace sur lequel sont définies les variables aléatoires $W(j_1, ..., j_n)$. Considérons sur l'espace produit $\Omega \times [0, 1]$ la probabilité Q définie par

$$Q(A) = E\left(\int 1_A \, d\mu\right).$$

Posons $X_n = \sum_{j_1,...,j_n} W(j_1, ..., j_n)\, 1_{I(j_1,...,j_n)}$. On a alors

$$\mu_n = \prod_{1\leqslant j\leqslant n} X_n$$

(avec un abus de notation évident).

Ecrivons $\mu = \mu_n \nu_n$, ici ν_n est une mesure dont la restriction à chaque intervalle de la $n$ième étape est définie de façon analogue à μ.

Observons que les variables $c^n \nu_n(I(j_1, ..., j_n))$ ont la même distribution que Y_∞ et que, pour n fixé, elles sont mutuellement indépendantes. En outre, les variables $\nu_n(I(j_1, ..., j_n))$ et $W(k_1, ..., k_p)$ sont indépendantes lorsque l'intervalle $I(k_1, ..., k_p)$ n'est pas strictement contenu dans l'intervalle $I(j_1, ..., j_n)$.

Il est commode de considérer la fonction aléatoire

$$T_n = \sum_{j_1,\ldots,j_n} c^n \nu_n(I(j_1,\ldots,j_n)) \, 1_{I(j_1,\ldots,j_n)} .$$

Si u est une fonction définie sur $[0, 1]$, constante sur les intervalles de la $n$ième étape, on a

$$\int u \, d\mu = \int_0^1 u(x) \, \mu_n(x) \, T_n(x) \, dx. \tag{21}$$

Le théorème résulte des deux lemmes qui suivent.

Lemme E. *Si* $E(W \log_c W) < 1$, *alors presque sûrement* μ*-presque partout* $(1/n) \log \mu_n$ *tend vers* $E(W \log W)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Démonstration. On va montrer que l'on a

$$\sum_{n\geqslant 1} Q(\{X_n > e^{n-1}\}) < \infty \tag{22}$$

et que

$$\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} [\log \inf(X_n , e^{n-1}) - E(W \log \inf(W, e^{n-1}))] \text{ converge } Q\text{-p.s.} \tag{23}$$

On aura alors Q-presque sûrement $X_n \leqslant e^{n-1}$ à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log \inf(X_j , e^{j-1}) = E(W \log W),$$

d'où le lemme.

Commençons par évaluer $Q(\{X_n > e^{n-1}\})$. On a

$$Q(\{X_n > e^{n-1}\}) = E \left\{\int 1_{\{X_n > e^{n-1}\}} \, d\mu\right\},$$

tenant compte de (21) et des propriétés d'indépendance des variables, on obtient

$$\begin{aligned} Q(\{X_n > e^{n-1}\}) &= E \int_0^1 1_{\{X_n(x) > e^{n-1}\}} \, \mu_n(x) \, T_n(x) \, dx \\ &= \int_0^1 E(X_n(x) \, 1_{\{X_n(x) > e^{n-1}\}}) \, E(\mu_{n-1}(x)) \, E(T_n(x)) \, dx \\ &= E(W 1_{\{W > e^{n-1}\}}), \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n\geqslant 1} Q(\{X_n > e^{n-1}\}) \leqslant E\left\{W \sum_{n\geqslant 1} 1_{\{W>e^{n-1}\}}\right\}$$
$$\leqslant E(W(1+\log^+ W)),$$

ce qui prouve (22).

Posons, pour alléger l'écriture, $X_n' = \log \inf(X_n, e^{n-1})$. Nous allons calculer $E_Q(X_n' \mid X_1, \ldots, X_{n-1})$. Soit u une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\int u(X_1, \ldots, X_{n-1})\, X_n'\, dQ$$
$$= E \int_0^1 u(X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x))\, X_n'(x)\, \mu_n(x)\, T_n(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 E[u(X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x))\, \mu_{n-1}(x)]\, E[X_n'(x)\, X_n(x)]\, dx$$
$$= E[W \log \inf(W, e^{n-1})] \int_0^1 E[u(X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x))\, \mu_{n-1}(x)\, T_{n-1}(x)]\, dx.$$

Ceci prouve que l'on a $E_Q(X_n' \mid X_1, \ldots, X_{n-1}) = E[W \log \inf(W, e^{n-1})]$.

On a aussi

$$\int (X_n')^2\, dQ = E \int_0^1 (X_n'(x))^2\, \mu_n(x)\, T_n(x)\, dx = E[W(\log \inf(W, e^{n-1}))^2],$$

donc

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2} \int (X_n')^2\, dQ$$
$$= E\left[W \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2} (\log \inf(W, e^{n-1}))^2\right]$$
$$\leqslant E\left[W(\log W)^2 \sum_{n\geqslant \sup(2, 1+\log W)} n^{-2} + W \sum_{2\leqslant n<1+\log W} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$
$$\leqslant E\left[W\left(\log^+ W + \frac{(\log W)^2}{\sup(1, \log W)}\right)\right].$$

Le théorème de convergence des martingales de carrés sommables donne alors (23).

Lemme F. *Supposons que* $E(W \log_c W) < 1$ *et que* $E(Y_\infty \log Y_\infty) < \infty$.

Alors presque sûrement μ-presque partout $(1/n) \log v_n(I_n(x))$ *tend vers* $-\log c$.

Démonstration. On a

$$\int T_n^{-1/2}\, dQ = E \int_0^1 \mu_n(x)(T_n(x))^{1/2}\, dx = E(Y_\infty^{1/2}),$$

d'où

$$\int \Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\, T_n^{-1/2}\Big)\, dQ < \infty.$$

Par suite, Q-presque sûrement, à partir d'un certain rang on a $T_n^{-1/2} \leqslant n^2$, d'où $\underline{\lim}_{n\to\infty}(1/n) \log T_n \geqslant 0$. Jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé la seconde hypothèse.

Montrons maintenant que, Q-presque sûrement, on a $\overline{\lim}_{n\to\infty} (1/n) \times \log T_n \leqslant 0$. Soit un nombre $\alpha > 1$. On a

$$E \int 1_{\{T_n > \alpha^n\}}\, d\mu = E(Y_\infty 1_{\{Y_\infty > \alpha^n\}})$$

(on utilise (21)).

Par suite

$$\sum_{n\geqslant 1} Q(\{T_n > \alpha^n\}) = E\Big(Y_\infty \sum_{n\geqslant 1} 1_{\{Y_\infty > \alpha^n\}}\Big)$$
$$\leqslant E(Y_\infty \log_\alpha^+ Y_\infty).$$

Ceci prouve que, pour tout $\alpha > 1$, Q-presque sûrement on a $\overline{\lim}_{n\to\infty}(1/n) \log T_n \leqslant \log \alpha$, d'où le résultat annoncé. Puisque l'on a $v_n(I_n(x)) = c^{-n} T_n(x)$ le lemme est démontré.

Pour démontrer le corollaire, on utilise un théorème de Billingsley [7, pp. 136–145].

Remarque. Sous la seule hypothèse, $E(W \log_c W) < 1$, on obtient que presque sûrement tout borélien de dimension $<D$ est de μ-mesure nulle.

Références

1. B. Mandelbrot, Intermittent turbulence in self similar cascades: Divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid Mech.* **62** (1974), 331–358.
2. B. Mandelbrot, Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire, *C. R. Acad. Sci. Paris* **278** (1974), 289–292.

3. B. Mandelbrot, Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire: quelques extensions, *C. R. Acad. Sci. Paris* **278** (1974), 355–358.
4. J. Peyrière, Turbulence et dimension de Hausdorff, *C. R. Acad. Sci. Paris* **278** (1974), 567–569.
5. J.-P. Kahane, Sur le modèle de turbulence de Benoit Mandelbrot, *C. R. Acad. Sci. Paris* **278** (1974), 621–623.
6. P. A. Meyer, "Probabilités et Potentiel," Hermann, Paris, 1966.
7. P. Billingsley, "Ergodic Theory and Information," Wiley, New York, 1965.